113 - Groupe des nombres complexes de module 1. Sous-groupes des racines de l'unité. Applications.

I) $\mathbb{U}$ et l'exponentielle [Madère] + [Vid] + [LFA analyse]

1) Définition [Madère]

Déf et prop : z→|z| est un morphisme de groupe de C* dans R+*. On note U son noyau, qui est un groupe multiplicatif. On note aussi parfois S^1.

Ex : 1, i, -1, -i

Rq : U=U(1) (vu que la déf de U(1) c'est l'ensemble des z tq $z\bar{z}=1$…

Prop : C est isomorphe à R+* x U *(z→|z|*z/[z|)*

2) Topologie

Prop : S^1 est connexe et compact

3) Exponentielle [Vid] + [LFA]

Déf : exponentielle complexe. Bien défini. Mph de groupe de (C,+) dans (C*,x) [Vid 19]

Prop : exp est holomorphe [Vid 19] (car (exp(a+h)-exp(a))/h=exp(a)*(exp(h)-exp(0))/h, équivalent à exp(a))

Csq : exp est surjective [Vid 19] *(en effet, exp est différentiable en zéro, par TIL, il existe un ouvert dans Im(exp), donc Im(exp) est ouvert donc fermé donc C*)*

Prop : exp(iR)⊂$\mathbb{U}$ *(le conjugué de exp(ix) est exp(-ix) et leur produit est le module au carré, donc le module est 1)*

Csq : on peut restreindre exp : (i$\mathbb{R}$,+)→($\mathbb{U}$,x) en un morphisme de groupe surjectif. Autrement dit, tout élément de U s'écrit exp(iθ) *(même principe que la surjectivité sur C* entier)*

Prop : Ker(exp) est uns sg non trivial de i$\mathbb{R}$ [Vid 20] *(d'après la surjectivité, $\exists\, a\in i\mathbb{R}$ tq exp(a)=-1 donc exp(2a)=1 et a≠0 ; Ker≠ $i\mathbb{R}$ sinon exp($\mathbb{C}$)⊂ $\mathbb{R}$)*

Csq : il existe b≠ 0 tq Ker(exp)=b$\mathbb{Z}$. Par définition, π=b/2. Ker(exp)=2iπ$\mathbb{Z}$. Par théorème d'homéo, on a $\mathbb{U}\cong i\mathbb{R}/2i\pi\mathbb{Z}$=R/2π$\mathbb{Z}$. *(Ker(exp) est fermé comme image réciproque de 0, donc non dense, donc discret)*

Déf : on **définit** cos et sin.

Prop : quelques formules de trigo

4) Argument [LFA]

Déf : il existe donc un unique couple (r,u) dans R+* x U tq z=ru. Par surjectivité de l'exp, il existe θ∈$\mathbb{R}$ tq z=|z|exp(iθ). On appelle argument l'ensemble des réels θ vérifiant ceci. On appelle détermination de l'argument un réel θ qui marche. On parle de détermination principale de l'argument le réel qui se trouve dans]-π,π] *(r=|z| et u=z/|z|)*

II) Angles et rotations planes

1) Rotations planes

Déf : SO(2)

Prop : éléments de So(2).

Prop : S^1 ≅ SO(2) *(a→(z→az))*

2) Angles

Prop : action transitive de O(2) sur S^1. L'action est simplement transitive si on la restreint à SO(2) *(transitivement : base incomplète. Simplement : soient f et g tq f(u)=g(u). Alors g{-1}f fixe la droite ℝ.u point par point, donc aussi l'orthogonal car c'est une isométrie, et retreint à l'orthogonal c'est soit Id soit –Id mais comme c'est dans SO(2) c'est Id. Fixe une base donc c'est Id)*

Csq : SO(2) est connexe *(th d'homéo)*

Déf : pour un couple (u,v), on définit F(u,v) l'unique rotation qui permet de passer de u à v. On Définit ensuite la relation d'équivalence (u,v)≈(u',v') ssi la rotation qui passe de l'un à l'autre est la même. Le quotient par cette relation d'éq est l'ensemble des angles orientés [Vid]

Prop : Chasles [Vid]

Déf : mesure de l'angle

III) Sous groupes de 𝕌, racines de l'unité

1) Sous groupes de U [LFA Algèbre]

Prop : un sous groupe de U est dense ou cyclique *(notons Π l'exponentielle de (iR,+) dans (U,x) qui est un mph de groupe. Soit G un sg de u. Alors Π^-1(G) est un sg de G. Supposons Π^-1(G) dense dans R. Alors G=ΠΠ^-1(G)=Π(H) où H dense, et comme Π est surjective continue, G est dense dans U. Supposons Π ^-1(G)=aiZ. Alors G=ΠΠ^-1(G)=Π(aiℤ). On a donc G=<exp(ia)>. Si a∈2πℚ alors on mq ça boucle. Sinon, G=exp(aiℤ)=exp(aiℤ+2iπ ℤ). Or aiℤ+2iπ ℤ est dense dans ℝ, donc G est dense dans ℝ)*

Cas particuliers : <exp(i2πa)> est dense si a est irrationnel, cyclique sinon.

2) Racines n-èmes [Goz]

Déf

Un est le seul groupe d'ordre n dans S^1

Racine primitive, cardinal

Th de Kronecker : P un polynôme unitaire de Z[X] dont les racines sont fe module inférieur à 1. On suppose P(0)≠ 0. Alors les racines de P sont des racines de l'unité[Gou 89] ou [FGN1 213] *(on commence par montrer que l'ensemble de ces polynôme est fini, en montrant que les coeff de ces polynômes sont majorés (on majore les fonctions symétriques). Si z1,…,zn sont les racines de P, on défini Pk=(X-z1^k)…(X-zn^k). On vérifie que Pn vérifie les pptés de P. Comme il y en a un nb fini, il y a un nb fin ide racines possibles, donc k→zi^k n'est pas injective, ie zi est une racine de l'unité)*

3) Polynômes cyclotomiques

Déf

Propriétés (formule, à coeff dans Z, irreductible)

Csq : degré des extensions

IV) Applications

1) Wedderburn

Théorème *(n'utilise pas l'irréductibilité des poly cyclo)*

2) Dirichlet faible

Utilise l'irréductibilité

3) Construction de polygones [Carrega]

Un sens du théorème de Gauss

V) Une dernière apparition de S^1

On regarde la sphère S^3 comme l'ensemble des couples (z1,z2) tq $|z1|^2+|z2|^2=1$. A un point de S^3, on associe le point $|z2|/|z1|$, et l'infini si z1=0. L'image de cette application est donc un plan complexe auquel on a rajouté ∞, c'est donc S^2 par projection stéréographique. Quelle est l'image réciproque d'un point de S^2 par cette application ? C'est S^1.

Développements :
Théorème de Gauss [Carrega 48] (**)
Théorème de Dirichlet faible [Goz 84] (**)
Irréductibilité des polynômes cyclotomiques [Goz 69] (**)

Pas mis :

- théorèmes de relèvements (ça à l'air compliqué). Pour tout mph continu f de (R,+) dans (C*,x), il existe a∈ℂ tq f(x)=exp(ax). Tout mph de groupe continu de U dans U est du type z→z^n [Vid 20]
- Séries de Fourier, transformée de Fourier discrète
- Il y aurait une application du fait que les sous groupes de U sont dense ou cycliques dans le Avez de géométrie, qui dit qu'il existe une infinité de puissances de 2 qui commencent par un 7 en base 10.

Rapport du jury : les propriétés des polynômes cyclotomiques doivent être énoncées. Leur irréductibilité sur Z doit être maîtrisée. Il est tout à fait possible de parler d'exponentielle complexe, de théorème du relèvement ou de séries de Fourier tout en veillant à rester dans le contexte de la leçon. Les polynômes cyclotomiques (programme 2009) trouveront naturellement leur place dans cette leçon. Leur irréductibilité doit être maîtrisée. Il y a trois réalisations de ce groupe, SO(2), U(1) et $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$. Chacune est reliée à un aspect géométrique, algébrique, arithmétique. C'est l'occasion de s'interroger sur l'exponentielle complexe, ce qu'est le nombre π, la mesure des angles. Quelle place trouve la suite exacte $2\pi\mathbb{Z} \to \mathbb{R} \to U(1)$? Y-a-t-il une section continue ?